ВЪВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЯТА НА РАЗМИТИТЕ МНОЖЕСТВА

1. Размити множества и изчислителна интелигентност

ИЗЧИСЛИТЕЛНА ИНТЕЛИГЕНТНОСТ (SOFT-COMPUTING) =

ТЕОРИЯТА НА РАЗМИТИТЕ МНОЖЕСТВА (РМ)

+ НЕВРОННИТЕ МРЕЖИ (НМ)

+ СЪВРЕМЕННИ (БЕЗГРАДИЕНТНИ) МЕТОДИ ЗА ОПТИМИЗАЦИЯ
(генетични алгоритми, еволюционни алгоритми, симулирано каляване, случайно търсене и др.).

ИЗЧИСЛИТЕЛНА ИНТЕЛИГЕНТНОСТ = изчислителен подход за създаване на системи с изкуствен интелект (ИИ) - интелигентни системи (ИС)

ИС подобно на човека:

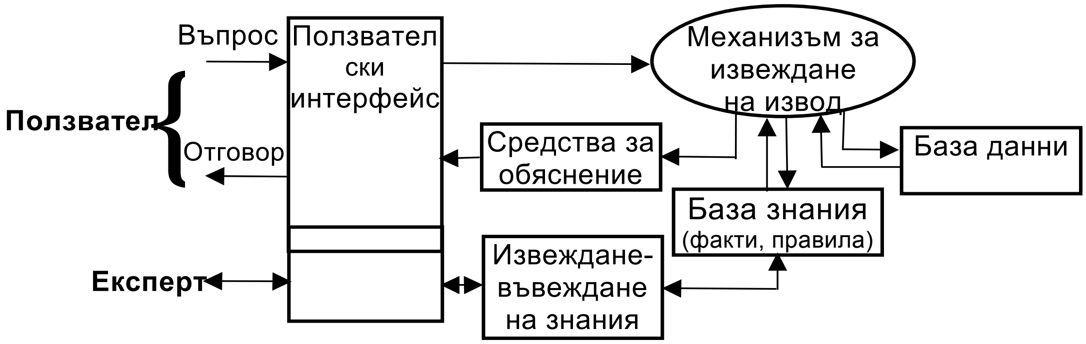
1) опит и познания в определена област;
2) способност да се адаптират и обучават в условия на неопределена, неточна и променяща се околна среда;
3) способност да вземат решения и предприемат действия.

Изчислителни техники на ИС:

1) обучение и адаптация на НМ - динамични системи на основата на конекционизма и различната архитектура, способни да разпознават образи при непълна информация чрез използване на принципа на паралелизъм и излишък;
2) извеждане на заключение (вземане на решение) чрез размита логика (РЛ) на база на натрупан човешки опит и зададена лингвистично (словесно) непълна, неопределена и многозначна качествена информация;
3) недиференциращи оптимизационни техники, обединяващи и допълващи 1) и 2) на основата на биологичен прототип, свързан с еволюцията.

Съвременните ИС = човешки опит, биологични модели, нова оптимизационна техника, числени методи, нова област на приложение, отсъствие на класически математически модели, толерантност към неточности.

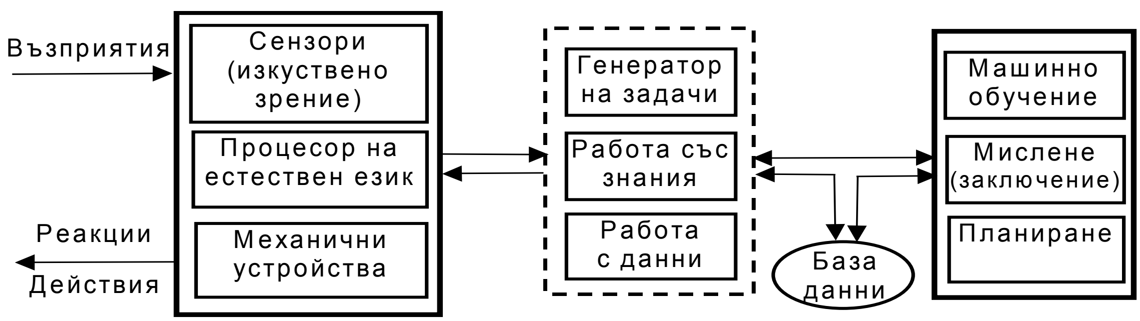
Класическите системи с ИИ имитират човешката интелигентност на макро ниво в лингвистична форма - оперират със структурирани бази знания от символно зададена информация за факти и правила –експертни системи (ЕС)



Класическа експертна система

Историческо развитие

	Класически системи за ИИ	Невронни мрежи	Размити системи	Други техники
40-те год.	**1947** Основи на Кибернетиката –инф. и упр. на хора и машини	**1943** McCulloch-Pits невронен модел		
50-те год.	**1956** ИИ	**1957** Персептрон		
60-те год.	**1960** език LIPS	Adaline-Madeline невронен модел	**1965** Размити множества (Заде)	
70-те год.	Експертни системи	**1974** Метод на обратното разпростр. на грешката (ОРГ) за обучение на многосл.НМ **1975** Когнитрон,неокогнитрон	**1973** Лнгвистична променлива (Заде) **1974** Размит регулатор на Мамдани – І-во инд. прил.-управл. на темп. в цим. пещ в Дания	Генетичен алгоритъм
80-те год.		**1980** Самоорганизираща се карта **1982** НМ на Хопфийлд **1983** Машина на Болцман **1986** Бум на ОРГ алгорит.	**1985** Размито моделиране (модел на Takagi-Sugeno)	Изкуствен живот Имунно моделиране
90-те год.			**1990** Невронно-размито (Н-Р) мод. **1991** Адаптивно Н-Р закл. ANFIS **1994** CANFIS (Co-active ANFIS)	Генетично програмиране



Машинен интелект

Списания	Брой публикации (управление)	Организации
1968г. Размити множества и системи, издател - “Норд Холанд	1965г. - 2;	**1.** International Fuzzy Systems Association **IFSA;**
1978 г. Размити множества и системи на IFSA	1983г. – 2462;	**2.** Berkeley Initiative in Soft Computing **BISC;**
1980г. Бюлетин за размити подмножества и техните приложения, Франция	**INSPEC** 1970-2000г - 26,680	**3.** North American Fuzzy Information Processing Society **NAFIPS;**
1981г. Размита математика, Китай	**Math.Sci.Net** 1970-2000г. 11,357:	**4**. Japan Society of Fuzzy Theory and Systems **SOFT;**
1993г. IEEE Размити системи **+** Интелигентни и размити системи **+** Неопределеност, размитост и базирани на знания системи (IJUFKS)	2004г. - 40,352	**5**. European Society of FL and Technology **EUSFLAT;** **6.** Laboratory for Int. Fuzzy Engineering **LIFE**.

2. Размито управление и размити множества

Синтез на системи за пряко/супервайзорно управление, базирани на знания (човешкия опит)

ЦЕЛ: желани показатели, надеждност и робастност

УУ - моделира действията на опитния оператор, вкл. лог. операции на включване, изключване, превключване на режими, настройка, адаптация

РУ - определения:

- РУ - експертна система, работеща в реално време по правила с качествени размити променливи и техните размити стойности

IF (ако) <условие>– **THEN** (то, тогава) <действие>

IF “налягането” **е** “високо” **AND** “нараства бавно” (съставно усл.)
THEN “енергията” **е** “средно намаляваща”.

- “налягането” = Вх.ЛП1 с Л-стойност1,1 “високо”
- “нараства” (производна на налягането) = Вх.ЛП2 с Л-стойност2,1 “бавно”
- “енергията” = Изх.ЛП с Л-стойност2 “средно намаляваща”

IF, AND, THEN - размити оператори
ЛП - думи и изрази на човешки език, х-ращи качествени променливи
Л-стойност на ЛП - думи и изрази - интерпретират се количествено като РМ
Правила - числови обекти и се решават чрез функционални таблици, компаратори и интерполация - високо бързодействие при работа в реално време.
Решаване - достигане на крайното заключение (действие) с размита логика (РЛ - близка до човешкото мислене и език.) за действия над РМ

- РУ - базирано върху таблици нелинейно управление, изчислително просто и бързо за приложения в реално време

Теорема на Коско: всяка непрекъсната нелинейна функция може да се апроксимира с достатъчна точност с крайно множество от размити променливи, стойности и правила.

- РУ - нова технология за управление (пряко и супервайзорно) с голяма мощ и обхват = ПИД регулатор **+** логика старт/стоп, превключване на режими (при периодични процеси), аварийни операции **+** настройка и адаптация **+** мониторинг и анализ на голям обем информация (символна и числова от измервания в различни нива са абстрактност) **+** идентификация на грешки **+** филтрация на аларми **+** диагностика (сравнение на измерените величини с тези от модел) **+** планиране;

- РУ - за сложни обекти (нелинейни, многосвързани, нестационарни, с неопределености, закъснение и смущения), за които **НЯМА**:

а) точен и несложен математически модел
б) математически модел на целите и критериите за управление
в) методи за формален синтез на управляващи алгоритми
г) достоверна, точна и обективна количествена информация предимно от измерване - използва се качествена и експертна информация (неточна, непълна, двусмислена, т.е. размита) за процесите при взимане на управляващо решение

Предимства на РУ: 1) устойчиво и робастно за голям обхват на сигналните смущения и промяната в параметрите на обекта; 2) с бързо проектиране и внедряване (разработва се на общ език за технолога и инженера по автоматизация); 3) добър пазар

Ограничения РУ:

1) Достатъчно емпирични познания при сложни, лошо структурирани процеси без аналитичен модел

2) Сложни критериите за устойчивост на система с РУ (СРУ- нелинейна);

3) Малко подготовени на кадри;

4) Пазаров интерес и продаваемост на СРУ - на основа на "дружелюбността ", допълнителната функционалност и аспектите на околната среда (намалено замърсяване, икономия на материали и енергия - например вода в пералните и т.н.) **А НЕ** на РУ като "**нов принцип**" – по-добро качество, по-високо ниво на автоматизация, по-икономично

Индустриални приложения на РУ – начало 80-те години в Япония

- битова техника (перални машини, фотоапарати и камери с адаптивно размито фокусиране, климатични инсталации за кондициониране на въздуха в помещения и др.),
- системи за автопилот (мотокари, кранове, коли и др.),
- автомобилна електроника (спирачна система), осветление, охранителни системи, диагностика,
- логистика, компресиране на данни,
- охлаждане на генератори,
- циментови пещи и др.

Освен в областта на управлението РЛ при: а) разпознаване на изображения - образи, звуци; б) обработка на сигнали; в) количествен анализ (изследване на операциите, мениджмънт); г) системи за вземане на решение (експертни системи за диагностика, планиране и предсказване, обработка на естествени езици); д) обработка на информация (бази данни).

Основни тенденции:

1) интегриране на РС с класическото управление и други прогресивни подходи за повишаване на интелигентността на системата;
2) разработване на общи методи за проектиране на размити системи с отчитане на изисквания за устойчивост и робастност;
3) разработване на програмни системи, подпомагащи и автоматизиращи проектирането на РС и промишлени изследвания на РМ и управляващи алгоритми;
4) Разработване на методология за проектиране на РУ за различни приложения и разширяване на областите на приложение.

Китове с хардуерни и софтуерни ресурси за РУ към PLC със стандартни устройства, процесори + специализирани процесори и ко-процесори РЛ

3. Количествено представяне на качествената информация и неопределеността за процесите

Качествена информация за процеса:

- неизмерими качествени променливи, описани с думи - цвят на стъклената стопилка, лъскавина, качество на продукция;

- числови количествени променливи, измервани в конкретни точки или оценявани косвено по други пряко измервани величини (температура, брой изделия, маса и т.н.), носители на информация повече от качествен отколкото от количествен характер поради сложни връзки, нестационарност, смущения ...

Класическите подходи за системен анализ - неприложими в сложни човешки системи с поведение - човешката преценка, възприемане и емоции + принципът за несъвместимост между точност и значимост на човешките съждения

Професор Lofti Zadeh (университета Беркли, САЩ) –-**ЛП** = алтернативен подход към моделирането на човешкото мислене

Качествената информация

1) **ЛП** - обобщена информация по приблизителен начин на естествен език – думи и фрази = терми (“голямо”, “малко” ...), терми с модификатори (“много голямо”), отразява съдържателната страна на процесите

Терми на ЛП по синтактични **G** и семантични **M** (смислови) правила

ЛП1:*x*=”качество” на продукт”=”много добро”,“добро“,“нормално”,“ниско”,“много ниско” (дискретна, качествена)

ЛП2: *y*=”температура”=“висока”, “средна”, “ниска” (непрекъсната, количествена)

Терм-множество T(.) за ЛП
T(*x*)=“много добро”+”добро”+”нормално”+”ниско”+”много ниско” (мощност 5)

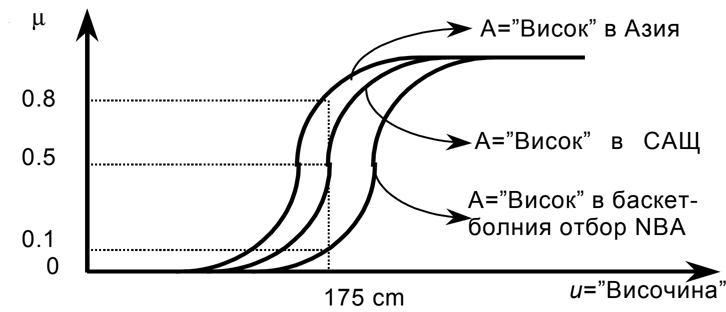
Универсално множество U - физическата област на изменение на дадена ЛП *u* - $u \in$ U (U_y =0 –100,^oC) - непрекъснато и дискретно; нормиране $U_y \in (y_{min}, y_{max}) \rightarrow (\bar{y}_{min}, \bar{y}_{max})$ най-често в (-1,1) или (0,1) - бездимензионно.

ЛП с име *u* се дефинира еднозначно и пълно с петорката (*u*, T(*u*), U_u, G_u, M_u).

2) по същество **РАЗМИТА** - нееднозначна, приблизителна, с неясни граници и плавно преливане, субективна – дава степен на съгласие, че дадено свойство е характерно за даден обект: *прагова стойност за сравнение; **оценка за близост до образци; ***консервативно окачествявани с “да”, “не” и “не съм сигурен”.

3) На термите експерти съпоставят числово множество - РМ

РМ A_i с елементи *u* (*x*, *y* и т.н.), $u \in A_i$ със степен на принадлежност, определена от функцията на принадлежност (ФП) $\mu_{Ai}(u) \in [0,1]$, $u \in$ U - A_i е подмножество на U - $\mu_{Ai}(u)$ се задават **субективно** от експерти с цел **подреждане** - $\mu_{Ai}(u)$: $U \rightarrow [0,1]$ в **зависимост от контекста** и дават степента на увереност, че даден елемент $u_к$ притежава определено свойство.
Синтактичните правила G генерират термите в T(.), а семантичните M (смисловите) - РМ, т.е. ФП,т.е. разположението всеки терм в U.



4. Понятие за размито множество

Обикновеното множество ОМ в класическата математика представлява съвкупност от елементи (обекти) *u*, притежаващи известни общи свойства. $A_o(u)$ се определя чрез бинарна характеристична функция $h(u)$, $h(u)=1$ за $u\in U$, $u\in A_o$, и $h(u)=0$ за $u\notin A_o\rightarrow$ **две групи** елементи на универсалното множество

РМ – обобщение на ОМ - елементите на РМ притежават общите свойства за множеството с различна степен и следователно принадлежат на РМ в различна степен – **важна е степента на принадлежност**

РМ $A(u)=\{u,\ \mu_A(u)|\ u\in U\}$, u -елементите, $u\in U$, и $\mu_A(u)$ - съответните функции (степени) на принадлежност на всеки елемент към А (непрекъсната/дискретна)

ФП $\mu_A(u)$ при РМ - аналог и обобщение на $h(u)$ при ОМ, $0\le\mu_A(u)\le 1$ и преобразува U в пространството на ФП М= {0,1} - $U\xrightarrow{\mu(u)}M$

Границите на принадлежност към РМ са постепенни (неопределени, преливащи), а не отсечени (резки) както при ОМ

Размитостта представлява вид неопределеност, произтичаща от групирането на елементите в класове, които нямат строги и ясно определени граници.

Полза от размиването - по-голяма общност на разглежданията, моделиране на съществуващи проблеми в реалния свят, методология за толериране на неточности

Представяне на РМ

1. Чрез изброяване(сумиране/интеграл = обединение на едноточкови множества)

$$A(u) = \mu_1/u_1 + \mu_2/u_2 + ... + \mu_n/u_n = \sum_{i=1}^{n}\mu_i/u_i \quad \text{(крайно дискретно множество U)}$$

$$A(u) = \int_U \mu_A(u)/u \ . \quad \text{(непрекъснато универсално множество U)}$$

2. Графично, аналитично и параметрично

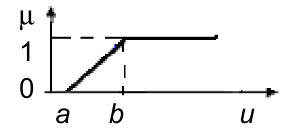
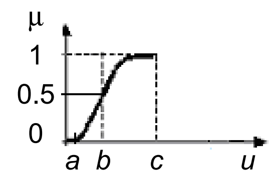
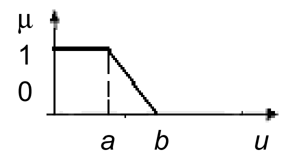
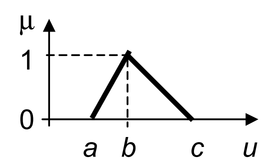
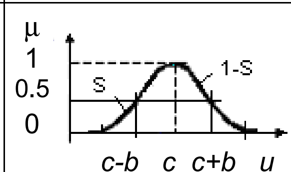
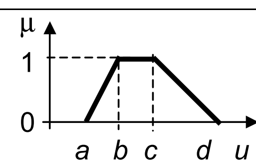
"∗" - ФП, дефинирани съгласно различни вероятностни разпределения

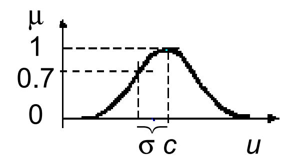
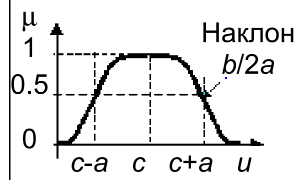
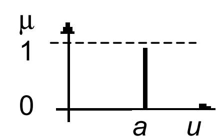
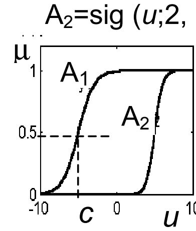
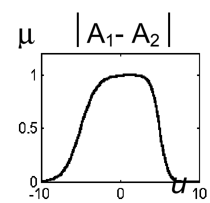
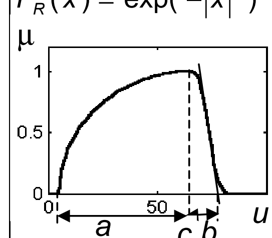
"•" -съставни ФП, най-общо несиметрични на основа на сигмоидални, леви/десни

Композитни (съставни) ФП, получени чрез действия над прости ФП – например чрез събиране или изваждане

Параметризация на ФП - представяне чрез операторите "max", "min" и "не", образуващи както в класическата логика пълна система

Функции на принадлежност

Функции на принадлежност	**Аналитично представяне**	**Графично представяне**
Γ - функция (отворена отдясно)	$\Gamma(u;a,b)=\begin{cases}0, & u<a\\ \frac{u-a}{b-a}, & a\le u\le b\\ 1, & u>b\end{cases}$	
S – функция (гладка, диференцируема; несиметрична)	$S(u;a,b,c)=\begin{cases}0, & u\le a\\ 2.\left(\frac{u-a}{c-a}\right), & a<u\le b\\ 1-2.\left(\frac{u-c}{c-a}\right), & b<u\le c\\ 1, & u>c\end{cases}$	
L- функция (отворена отляво)	$L(u;a,b)=\begin{cases}1, & u<a\\ \frac{b-u}{b-a}, & a\le u\le b\\ 0, & u>b\end{cases}$	
Λ- функция (триъгълна, камбанкова, линейна)	$\Lambda(u;a,b,c)=\begin{cases}0, & u<a,u>b\\ \frac{u-a}{b-a}, & a\le u<b\\ \frac{c-u}{c-b}, & b\le u\le c\end{cases}$ **Параметрично :** $\text{triangle}\ (u;a,b,c)=\mathbf{max}(\mathbf{min}(\frac{u-a}{b-a},\frac{c-u}{c-b},0)$	
π- функция (камбанкова, симетрична; гладка, диференцуема; функция на Заде)	$\pi(u;b,c)=\begin{cases}S(u;c-b,c-\frac{b}{2},c), & u\le c\\ 1-S(u;c,c+\frac{b}{2},c+b), & u>c\end{cases}$	
Π - функция (трапецовидна; обощение на Г, L и Λ функциите)	$\Pi(u;a,b,c,d)=\begin{cases}0, & u<a,u>d\\ \frac{u-a}{b-a}, & a\le u<b\\ 1, & b\le u<c\\ \frac{d-u}{d-c}, & c\le u\le d\end{cases}$ **Параметрично :** $\text{trap}\ (u;a,b,c,d)=\mathbf{max}(\mathbf{min}(\frac{u-a}{b-a},1,\frac{d-u}{d-c}),0)$	

Функции на принадлежност	Аналитично представяне	Графично представяне
* **Гаусова** (гладка, диференцуема, инвариантна към умножение и Фурие преобразувание)	$\text{gaussian}(u;c,\sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-c}{\sigma}\right)^2}$ $\mu(u) = e^{-ku^2}$ $-$нормирана с $\sigma = 1$ и $c = 0$	
* **Бел** (обобщена камбанкова; функция на Коши; гладка, диференцуема; за b<0–обърната камбанка)	$\text{bell}(u;a,b,c) = \dfrac{1}{1+\left\lvert\dfrac{u-c}{a}\right\rvert^{2b}}$	
Размит сингелтон	$\mu(u) = \begin{cases} 1, & u = a \\ 0, & u \neq a \end{cases}$	
• **Сигмоидална** (несиметрична, отворена; използва се в невронните мрежи за функция на преобразуване)	$\text{sig}(u;a,c) = \dfrac{1}{1+e^{-a.(u-c)}}$ a задава наклона в точка (c, 0.5)	A_1=sig (u;1,-5) A_2=sig (u;2, 5) затворена 
• **L-R** (лява – дясна; композитна, затворена)	$LR(u;c,a,b) = \begin{cases} F_L\left(\dfrac{c-u}{a}\right) & u < c \\ F_R\left(\dfrac{u-c}{b}\right) & u \geq c \end{cases}$ $F_L(0) = F_R(0) = 1 \quad u = c$ $\lim\limits_{u \to -\infty} F_L(u) = \lim\limits_{u \to +\infty} F_R(u) = 0$ F_L, F_R – монотонни функции	$F_L(x) = \sqrt{\max(0,1-x^2)}$ $F_R(x) = \exp(-\lvert x\rvert^3)$ c=65, a=60, b=10

ФП не е вероятност, а разпределение на вероятности.

I. В теория на вероятностите дадено събитие E се дефинира чрез ОМ - хвърляне на зар - универсалното множество е дискретно, крайно и изброимо - U=[1 2 3 4 5 6]: събитието E=”число, по-малко от 4” $\rightarrow$ ОМ = [1 2 3] с вероятност да се случи $p(E)=\frac{n}{N}$, $p(E)\in[0,1]$, където n е честотата на случване при достатъчно голям брой опити (експерименти, наблюдения) N - $N\rightarrow\infty$.

Условна вероятност $p(E/E')$ да се случи E, ако предварително се е случило събитието E'', което вече ни е известно, например $p(E/3)=1$.

Теорията на вероятностите - правила за действия над вероятности за обективно представяне на случайните величини.

II. За РМ, описващо ε=”голямо число”(ГЧ)

$$\varepsilon=1/6+0.7/5+0.5/4+0.2/3+0/2+0/1=\sum\mu_{ГЧ}(u_i)/u_i,$$

вероятността да се падне ГЧ е

$$p(\varepsilon)=\Sigma p(u_i).\mu_{ГЧ}(u_i)=(1/6).(1+0.7+0.5+0.2)=0.4$$

($p(1)=p(2)=\ldots=p(6)=1/6$ -падането на 1, 2,...,6 са равновероятни събития).

РМ използвat субективна вероятност – ФП = степента на субективна увереност, че дадено събитие ще се случи (че дадено качество е присъщо на системата). Субективната вероятност се свързва с резултата от мисловен експеримент, допълващ недостатъчната налична информация.

Наличието на свойството “яснота” превръща РМ в ОМ.

При РМ ФП $\mu(u)$ е повече разпределение на вероятности върху U. Например, невъзможно е 1 и 2 да са големи числа $p(1)=p(2)=0$; 3 е възможно да е голямо число с вероятност $p(3)=0.2$ (степен на увереност) – вероятностното събитие е също така и възможно събитие; 4 е възможно да е голямо число с $p(4)=0.5$; 5 е голямо число с $p(5)=0.7$; 6 със сигурност е голямо число $p(6)=1$. Вероятностите се разпределят по U, но не дават сума, равна на 1 ($0+0+0.2+0.5+0.7+1\neq1$).

Основните различия между размитост и вероятност:

а) размитостта се отнася до детерминирани явления - вероятността - до стохастични, недетерминирани;

б) размитостта отразява една страна на неопределеността – неяснотата (двусмислието) в описанието чрез ЛП и терми – вероятността - неопределеността свързана с случайността на поява на ясно дефинирани събития;

в) размитостта изразява субективността в човешкото мислене, изразяване, чувства, опит и т.н., - вероятността е обективна статистика;

г) в РМ ФП изобразяват сходството между обекти по отношение неясно дефинирани свойства - вероятностните модели съдържат информация за относителните честоти на поява на събитията.

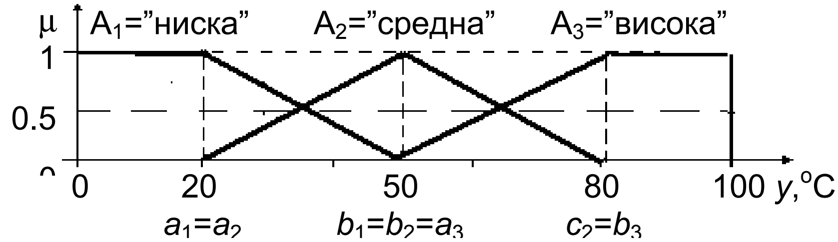
Пример 1

Дадено: ЛП y="температура"="ниска","средна","висока", $y \in U_y=[0,100]$,°C.

Задача: Да се съпоставят на термите РМ A_1="ниска", A_2="средна", A_3="висока" и се представят а) графично; б) аналитично; в) йерархично; г) таблично.

Решение:

а) Графично представяне

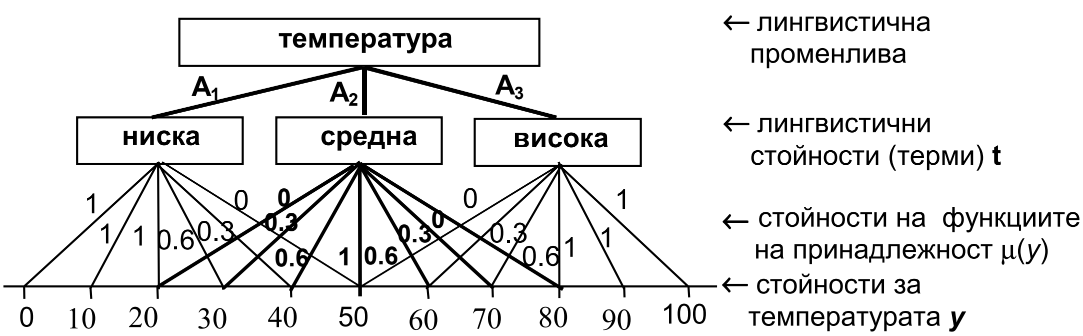


б) Аналитично представяне

$$\mu_{A_1}(y) = \underset{a_1=20,\, b_1=50}{L(y;\, a_1,\, b_1)} = \begin{cases} 1, & y < 20 \\ \dfrac{20-y}{50-20}, & 20 \le y \le 50 \\ 0, & y > 50 \end{cases}, \quad \mu_{A_2}(y) = \underset{a_2=20,\, b_2=50,\, c_2=80}{\Lambda(y;\, a_2,\, b_2,\, c_2)} = \begin{cases} 0, & y < 20, y > 80 \\ \dfrac{y-20}{50-20}, & 20 \le y < 50 \\ \dfrac{50-y}{80-50}, & 50 \le y \le 80 \end{cases}$$

$$\mu_{A_3}(y) = \underset{a_3=50,\, b_3=80}{\Gamma(y;\, a_3,\, b_3)} = \begin{cases} 0, & y < 50 \\ \dfrac{y-50}{80-50}, & 50 \le y \le 80 \\ 1, & y > 80 \end{cases}$$

в) Йерархична структура на различните нива на абстрактност



г) Таблично представяне, което се съхранява като "база данни"

Ниво на квантоване	Обхват	Степен на принадлежност		
		ниска	средна	висока
-5	0=y	1	0	0
-4	0<y≤10	1	0	0
-3	10<y≤20	1	0	0
-2	20<y≤30	0.6	0.3	0
-1	30<y≤40	0.3	0.6	0
0 (норма)	40<y≤50	0	1	0
1	50<y≤60	0	0.6	0.3
2	60<y≤70	0	0.3	0.6
3	70<y≤80	0	0	1
4	80<y≤90	0	0	1
5	90<y≤100	0	0	1

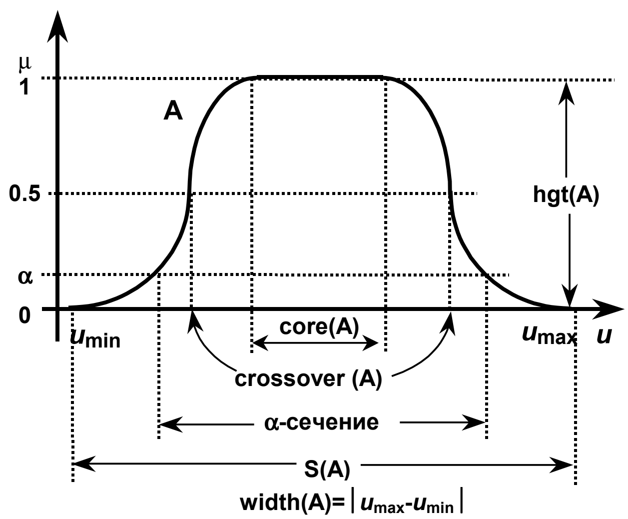
Размиване (фазификация) - съпоставяне на всеки терм за входната и изходната ЛП на РМ

Експерти определят: 1) бездименсионните нормирани универсални множества за входните и изходните променливи 2) реперен елемент u_0 с $\mu_A(u_0)=1$ за принадлежност към терма А=”нулево”; 3) броя терми, т.е. нивото на дискретизация; 4) вида на ФП на отделните терми; 5) параметрите на ФП; 6) скали

Термите - подредени последователно, изобразяващите РМ покриват цялото универсално множество, $\mu_{Ai}(u)$ образуват пълна функция с ниво на припокриване на два съседни терма от подредената редица терми $\mu_{Ai}(u_j)=\mu_{Ai+1}(u_j)=0.5$ – спазено условие за ортогоналност на терм-множеството T=[A_1...A_2] на ЛП $u\in$ U - $\sum_{i=1}^{n}\mu_{Ai}(u_j)=1$ за $\forall$ u, където A_i са изпъкнали нормални РМ.

При по-голяма детайлизация – нови терми с модификатори ("много нисък")

5. Характеристики на размитите множества



- **Поддържащо множество** S(A) (или support (A)) на РМ А е множеството от всички елементи u_i на А с $\mu_A(u_i)\neq 0$ ($\mu_A(u_i)>0$):

$$S(A)=\{u\in U \mid \mu_A(u)>0\}.$$

S(A)=[u_{min},u_{max}] за изпъкнало РМ

- **Широчина** width(A) на изпъкналото РМ А с S(A)

$$\text{width}(A)=\sup[S(A)]-\inf[S(A)]$$ или

$$\text{width}(A)=|u_{max}-u_{min}|,$$

$u\in S(A)$, $\inf[S(A)]\le u\le \sup[S(A)]$, за S(A) - ограничено множество $\sup[S(A)]$ е максималният елемент в S(A), а inf[S(A)] е минималният елемент в S(A).

- **Ядро** на РМ А е множество от елементи $u\in$ U на А, за които $\mu_A(u)=1$.

$$\text{core}(A)=\{u\in U \mid \mu_A(u)=1\}$$

За ядро от един елемент - елементът е връх на РМ А - u_{peak}.

- **Височина** hgt(A) на РМ А е най-голямата стойност на $\mu_A(u)$ за $u\in$ U:

$$\text{hgt}(A)=\sup_{u\in U}\mu_A(u).$$

А е **нормално** РМ, ако hgt(A)=1 ($\mu_A(u)=1$ поне за един елемент u от А)

- **α-сечение** (отрязък) A_α на РМ А е множеството от елементи u, за които $\mu_A(u)>\alpha$ (силно α - сечение се дефинира при $\mu_A(u)\ge\alpha$), $\alpha\in(0,1]$ - реално число:

$$A_\alpha=\{u\in U \mid \mu_A(u)>\alpha\}.$$

Принцип на резолюцията - всяко РМ А може да се разложи на своите α-сечения

$$- \ A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_\alpha} \alpha A_\alpha \ \text{ или } \ A = \int_0^1 \alpha A_\alpha \ ,$$

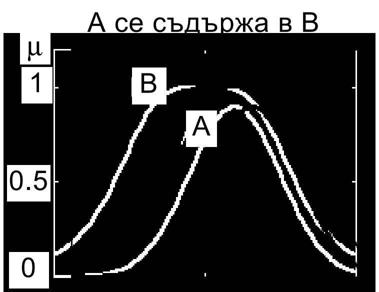
$\Lambda_\alpha=\{\alpha|\mu_A(u)=\alpha\}$ е множеството от всички нива α за различните α-сечения на РМ А

Теорема за представяне на РМ - всяко РМ А може да се възстанови от своите α-сечения A_α.

- **Пресечна точка** crossover(A) на РМ А е множество от елементи u на А с $\mu_A(u)=0.5$:

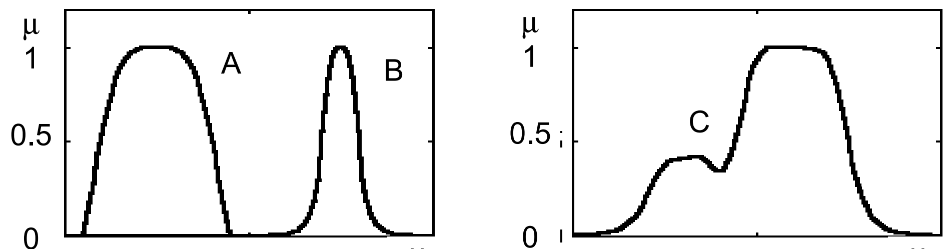
$$\text{crossover}(A) = \{u \in U \mid \mu_A(u) = 0.5\}.$$

- **Еднакви** (равни, еквивалентни) **РМ** А и В - дефинирани в едно и също универсално множество U и за всеки елемент $u\in U$ е изпълнено $\mu_A(u)=\mu_B(u)$.
- РМ А е **подмножество** на РМ В - $A\subseteq B$ - А и В са дефинирани в едно и също универсално множество U и за всеки елемент $u\in U$ е изпълнено $\mu_A(u)< \mu_B(u)$,



РМ А - размито подмножество на РМ В

- **Размит сингелтон** - РМ с $S(A)=u_1$ с $\mu_A(u_1)=1$ ($core(A)=S(A)=u_1$)
- **Изпъкнало** РМ А - $\mu_A(u)$ не съдържа вдлъбнатини - $\mu_A[\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]\ge \min[\mu_A(u_1),\mu_A(u_2)]$ за $\forall\lambda$, $\lambda\in[0,1]$ и $\forall(u_1,u_2)\in U$, или при всички α-сечения $\mu_{A\alpha}(u)$ са изпъкнали.



а) Изпъкнали РМ А и Е *б) Неизпъкнало РМ С*

- **Размито число** (РЧ) **=** РМ А: 1) А - дефинирано върху оста на реалните числа; 2) А - нормално размито множество - $\mu_A(u)=1$ поне за един елемент u; 3) А - изпъкнало РМ. За триъгълни РЧ (ТРЧ) $A=(a,b,c)$ α-сечението $A_\alpha= [a+(b-a)\,\alpha,\ c-(c-b)\,\alpha]$.

Изпъкналост - всичките α-сечения са в затворен интервал $\rightarrow$ разбираем смисъл (семантика) на РЧ по неговото разположение и асоциация с подходящия синтактичен описващ етикет (терм). Нормалност - измежду точките по реалната ос с най-големи стойности на ФП съществува поне една, която напълно удовлетворява предиката в **IF-THEN** правилото.

- **Симетрично** РМ А - за всеки елемент $u\in U$ $\mu_A(c+u)= \mu_A(c-u)$.
- **Отворено** РМ А (отляво $\lim\limits_{u\to-\infty}\mu_A(u)=1$ и $\lim\limits_{u\to+\infty}\mu_A(u)=0$ - L – функция, или отдясно $\lim\limits_{u\to-\infty}\mu_A(u)=0$ и $\lim\limits_{u\to+\infty}\mu_A(u)=1$ - Г – функция); **Затворено** РМ А - $\lim\limits_{u\to-\infty}\mu_A(u)=\lim\limits_{u\to+\infty}\mu_A(u)=0$ - ФП от тип Λ, π, Π, Гаусова, и др.