Дискретни системи. Методи за извеждане на дискретните предавателни функции. Цифрови регулатори.

4.1. Цифрови системи

Цифровите системи, се построяват на базата на комплекс от средства на изчислителната техника, основните елементи на които са :

1) ЦЕИМ,

2) устройства за въвеждане,

3) устройства за извеждане.

Функциите на ЦЕИМ могат да изпълняват:

1) ЕИМ (компютри),

2) DSP – цифрови сигнални процесори,

3) цифрово управление на твърда логика.

Първите се отнасят към универсални устройства на управление, вторите са специализирани за приложения, трети разработват се за конкретни устройства (например цифров филтър, който има във всяко ∑∆ АЦП).

Устройствата за въвеждането и изхода, в случай на съвпадането с аналогични сигнали, са АЦП и ЦАП-и, а в случай при съвпадането със цифрови сигнали – портове и интерфейси.

В системите със ЦЕИМ, последните могат да изпълняват ролята на :

1) регулатори

2) регулатори и устройства за сравняване

3) коригиращи устройства

4) самият обект.

Ако ЦЕИМ – е универсална (ЕИМ), то е възможно построяването на многофункционални системи за автоматично управление (САУ), когато една ЦЕИМ обслужва комплекс съставляващ обект от устройства.

Например, в автомобил:

1) система на навигация

2) системата на бордово електрозахранване

3) АВС

4) електронна предавка

5) управление на подаването на горивото.

В подобни случаи в състава на системата за цифрово управление трябва да влизат аналогови или цифрови мултиплексори и демултиплексори.

Във всичките случаи ЦЕИМ предоставя леко достъпни информационни потоци позволяващи освен пряко управление и осъществяването на следните функции:

1) контрол

2) оптимизация

3) координация

4) организация на всичките процеси.

Процеси протичащи в системите на цифрово управление

Дискретната природа на ЦЕИМ, определя наличието на 2 процеса в системата на цифрово управление:

1) дискретизация на сигнали по време (получаване на разширена функция),

2) квантуване на сигнали по нивото на (АЦП и ЦАП преобразувания).

Дискретизацията на сигнали във времето, прави системата дискретна, а квантуването по нивото – нелинейна. И двата процеса са съпроводени с възникването на методични грешки.

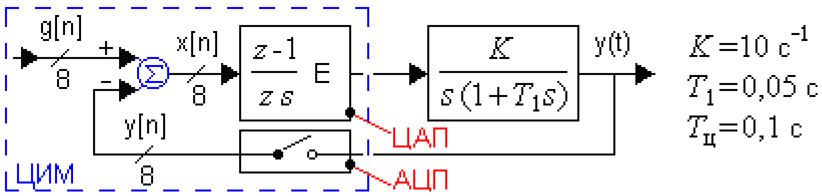
Изборът на честотата на дискретизация, произлиза от широчината на лентата на пропускането или от времето на регулиране на затворената система. Приемливите честоти на дискретизация са в 6..10 пъти по-големи от ширината на лентата на пропускането или от 2 до 4 дискретни отчети за времето на нараствания, в противен случай качеството на системата ще бъде рязко влошено.

Броят на стъпките на квантуване по ниво оказва съществено влияние на динамичните свойства на системата. При недостатъчен брой могат да възникнат периодични режими на превключвания между дискрети (авто-колебания).

Може да се случи така, че изпълняването от ЦЕИМ на задача (заявки до датчици, програмни изчисления, формиране на информационни потоци, записване в изходни портове), могат да бъдат изпълнени само при систематичното задържане на синтезирано въздействие на един такт на дискретизация. В този случай в системата с ЦЕИМ, ще възникне закъснение τ, което трябва да бъде отчетено в оператор на закъснение z^{-1} и по възможност отразено в предавателна функция $W(z, \varepsilon)$.

Обикновено броят на нивата на квантуване е голямо, затова влиянието му е пренебрегвано. Това прави системата, линейна и позволява използването на математическия апарат на импулсните системи.

Методика на извеждането на дискретна предавателна функция



Работа на ЦЕИМ се осигурява от АЦП (квантовател) и ЦАП (екстраполатор от нулев ред) следователно:

$$W(z)=\frac{z-1}{z}\cdot Z\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{K}{s(1+T_1 s)}\right\} = \dots$$

За да се намери z-изображението на непрекъснатата предавателна функция $W(s)$ по таблица е необходимо предавателната функцията да бъде разложена на прости дроби т.е. преобразувана към паралелна структура. Тогава за всяка най-проста част, сигнала ще постъпва от квантователя (което е и необходимо при използването на таблица):

$$\frac{1}{z^2(1+T_1 s)}=\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+\frac{C}{1+T_1 s}$$

където:

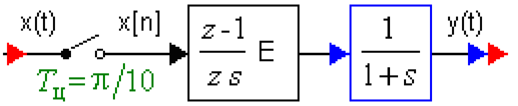
$A\,(1+T_1 s) + Bs\,(1+T_1 s) + Cs^2 = 1$;

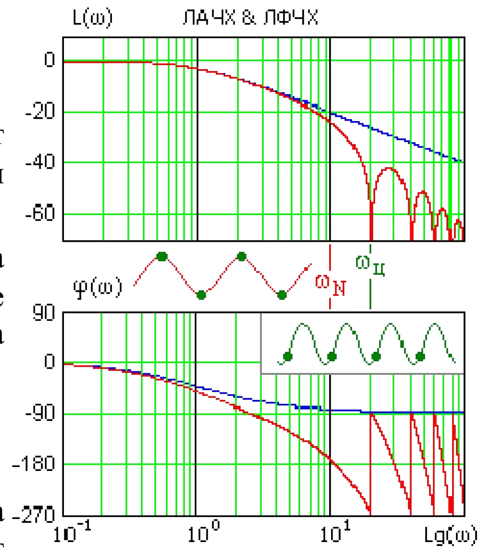
$(BT_1+C)\,s^2 + (AT_1+B)\,s + A = 0s^2 + 0s + 1$; => $\quad A = 1,\ B = -T_1,\ C = T_1^2$.

$$= K\cdot\frac{z-1}{z}\cdot Z\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{T_1}{s}+\frac{T_1}{s+1/T_1}\right\} = K\cdot\frac{z-1}{z}\cdot\left[\frac{T_ц z}{(z-1)^2}-\frac{T_1 z}{z-1}+\frac{T_1 z}{z-e^{-T_ц/T_1}}\right] =$$

$$= \frac{0{,}568z+0{,}297}{z^2-1{,}135z+0{,}135} \qquad \Phi(z)=\frac{W(z)}{1+W(z)}=\frac{0{,}568z+0{,}297}{z^2-0{,}567z+0{,}432}.$$

За синтеза на системите със ЦЕИМ по метода на логаритмичните амплитудни характеристики.





Представеният дискретен филтър има в областта от честоти ω ЛАЧХ и ЛФЧХ, които се използват при синтеза на коригиращи звена.

Преминаването с помощта на ϖ-преобразувание на ЧХ в областта на псевдочестоти λ, позволява да се получи ЛАЧХ, която е подобна на ЛАЧХ на непрекъснатата система.

Последователността на преобразования е следната:

$$W_э(s)\cdot W(s) \to W(z) \to W(\varpi) \to W(j\lambda T_ц/2).$$

Тези преобразования при използването на екстраполатор от нулев ред, могат да бъдат формализирани. Нека предавателна функция на непрекъснатата част има вида:

$$W_o(s)=\frac{K(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\ldots(1+\tau_m s)}{s^2\cdot(1+T_1 s)(1+T_2 s)\ldots(1+T_n s)}.$$

Техническата реализация на системата със ЦЕИМ позволява въвеждането на етапи:

1. Нека за честота на срез на непрекъснатата част се изпълнява условието $\omega_{ср} < 2/T_ц$.

2. Всичките времеконстанти в знаменателя се разделят на две групи – диапазон преди срязващата честота и диапазон от срязващата честота до честотата на дискретизация:

$$T_1, \ldots, T_q > (1/\omega_{ср} \ldots 1/\omega_ц) > T_{q+1}, \ldots, T_n.$$

3. Нека времеконстантите на числителя $\tau_1, \ldots, \tau_m$ да са по-големи от $1/\omega_{ср}$.

4. Понеже системата трябва да бъде устойчива, нека наклон на ЛАЧХ на $\omega_{ср}$ да бъде -20 dB/dec.

Приетите положения, позволяват описание на свойствата на системата в областта на ниски и високи честоти от двете предавателни функции:

$$\text{НЧ}\ W_o(s)_{НЧ}=\frac{k(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\ldots(1+\tau_m s)}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)\ldots.(1+T_q s)} \quad \text{където}\ m \le q-1$$

$$\text{ВЧ}\ W_o(s)_{ВЧ}=\frac{\omega_{ср}}{s(1+T_{q+1}s)\ldots.(1+T_n s)} \quad \text{където}\ \omega_{ср}=\frac{K\tau_1\tau_2\ldots.\tau_m}{T_1 T_1\ldots.T_n}$$

Сега за формалния преход в областта на псевдочестотите λ (преминавайки през междинни z и ϖ-преобразования), е достатъчно да се постави в предавателната функция предавателна функция $W_о(s)_{НЧ}$ $(j\lambda)$ вместо s и да се умножи с $(1\text{-}j\lambda T_ц/2)$. За ниски честоти резултатът е приблизително равен на 1.

А предавателна функция $W_о(s)_{ВЧ}$ ще съответства на израза:

$$W_о(j\lambda)_{ВЧ} = \frac{\omega_{ср}}{j\lambda}\cdot\frac{(1-j\lambda T_ц/2)}{(1+j\lambda T_ц/2)}\cdot\frac{[1+j\lambda(T_ц/2-T_\Sigma)]}{1}, \quad \text{где}: T_\Sigma = \sum_{i=q+1}^{n} T_i.$$

Чийто модул: $\left|W_о(j\lambda)_{ВЧ}\right| = \omega_{ср}\sqrt{1+\lambda^2(T_ц/2-T_\Sigma)^2}\Big/\lambda$.

Резултиращото фазово преместване на двете области е:

$$\varphi(\lambda) = -180+\sum_{i=1}^{m}\operatorname{arctg}\lambda\tau_i - \sum_{i=1}^{q}\operatorname{arctg}\lambda T_i - 2\operatorname{arctg}(\lambda T_ц/2)+\operatorname{arctg}(\lambda(T_ц/2-T_\Sigma)).$$

Изводи

1. В областта на НЧ ($\omega < 2/T_ц$) асимптотичната цифрова ЛАЧХ практически се слива с ЛАЧХ на непрекъснатата система (множителя $((1\text{-}j\lambda T_ц/2) \approx 1)$) и може да се положи $\lambda \approx \omega$. Това позволява едно към едно да се използват разработените за непрекъснатите системи методики за формиране при НЧ на желани честоти ЛАЧХ.

2. В областта на ВЧ разлика внася множителя $(1\text{-}j\lambda T_ц/2)$, влошава условията за устойчивост. Поради това при формиране на забранената ВЧ в областта на работните честоти величината $T_ц/2$ трябва да бъде сумирана с малка времеконстанта:

$$h = \frac{M+1}{M-1} = T_2 \Bigg/ \left[\frac{T_Ц}{2}+\sum_{i=q+1}^{m} T_i\right], \qquad \text{за 2-1-2}$$

$$\frac{T_Ц}{2}+\sum_{i=q+1}^{m} T_i \le \frac{1}{K_\nu}\frac{M^2+M\sqrt{M^2-1}}{2}, \text{(където: } M \le 1.3\text{) за 1-2}$$

Цифрова корекция

Цифрова или дискретна корекция, е достатъчно интересна , от практическа гледна точка, при своята конструктивна универсалност на устройствата и гъвкавост на настройките. Решаването на коригираща задача предполага модифициране на нискочестотните и средночестотни части на ЛАЧХ по правило с намаляване на срязващата честота $\omega_{ср}$. Известно е, че в този диапазон системите със ЦЕИМ и техните ЛАЧХ - $L(\lambda)$ не се отличават съществено по свойствата от непрекъснатите аналози. Поради това методиката за синтеза на корекции е единна за цифрови и непрекъснати системи. Проектирането на дискретни проекции се провежда в 4 етапа.

1. Синтез на предавателната функция предавателна функция на непрекъснато коригиращото устройство $\boldsymbol{W_к(s)}$ по методика разработена за непрекъснати системи.

2. Осъществяване на преходът от непрекъсната предавателна функция, на коригиращото устройство $\boldsymbol{W_к(s)}$ към еквивалентна и дискретна $W_к(z)$ посредством последователни преходи от изображения се осъществява по схемата:

$$W_к(s) \underset{s\leftarrow j\omega}{\longrightarrow} W_к(j\omega) \underset{j\omega\leftarrow j\lambda}{\longrightarrow} W_к(j\lambda) \underset{j\lambda\leftarrow 2\varpi/T_ц|_{\lambda_{ср}T_ц<2}}{\longrightarrow} W_к(\varpi) \underset{\varpi\leftarrow\frac{z-1}{z+1}}{\longrightarrow} W_к(z),$$

с помощта на резултиращи формули на билинейно преобразуване (т.е.формална постановка):

$$s \leftarrow \frac{2}{T_ц}.\frac{z-1}{z+1}$$

където: $T_ц$ – период на дискретизация .

3. Съставяне на структурна схема на дискретна предавателна функция $W_к(z)$, оптимизирана по количество паметта, бързодействие или за контрол на междинни фазови координати на системата.

4. Написване на програми за ЦЕИМ (периферен контролер, микро ЕИМ, ЕИМ, цифров сигнален процесор - DSP) или разработването на схема на базата на цифрови микросхеми.

- Трябва да се отбележи, че от непрекъснати предавателна функция можем да се получат безкрайно количество варианти на дискретна предавателна функция, при различни периоди на дискретизация .
- Обикновено честота на дискретизация $f_ц=1/T_ц$ се избират в 6..10 пъти по-голяма от честота на срез $f_{ср,}$ на отворената система. Първоначално честотата на дискретизация се избира да е по-голяма от ($f_ц$=10..30$f_{ср}$) след това за два три опита се стремим да я намалим (т.е. повтаря се втория етап). При ниски честоти на дискретизация, качеството на преходния процес се влошава (в сравнение с непрекъсната корекция), до такава степен, че не е обосновано да се плаща за ЦЕИМ при понижаване на производителността. Съответната предавателна функция $W_к(z)$ се използва и по-нататък.
- При синтеза на предавателна функция $W_к(s)$ или $W_к(z)$ е необходимо степените на числителя $W_к(s)$ да не са по-големи от степените на знаменателя или свободният член a_0 в знаменателят на предавателна функция $W_к(z)$, да не е нула, в противен случай е невъзможно реализирането на програмата.
- Ако се изисква обратен преход от $W_к(z)_{НЧ}$ към $W_к(s)_{НЧ}$, то следва да се използва обратната формула на билинейното преобразование.

$$z \leftarrow \frac{2+sT_ц}{2-sT_ц}$$

Този преход е еднозначен при известен период на работа на ЦЕИМ $T_ц$.

Цифрови регулатори

В непрекъснатите системи широко се използват PID-регулатори, които имат вида:

$$u(t) = K_P \cdot \left[x(t) + \frac{1}{T_I^x}\int_0^t x(t)dt + T_D^x \frac{dx(t)}{dt} \right].$$

Където : K_P – е коефициент на усилване на пропорционален канал; T_I^x – е времеконстанта на интегралния канал; T_D^x – времеконстанта на диференциалният канал.

За малки периоди на дискретизация $T_ц$ управлението, може да бъде преобразувано в диференчно уравнение, без съществени загуби в точността. Непрекъснатото интегриране може да бъде представено с помощта на метода на правоъгълниците 1, или метода на трапеците 2.

1 Използваме метод на правоъгълници, за апроксимация на непрекъснатия интеграл и записваме PID-закона в дискретен вид:

$$u[n] = K_P \cdot \left[x[n] + \frac{T_ц}{T_I^x} \sum_{i=0}^{n-1} x[i] + \frac{T_D^x}{T_ц} \left(x[n] - x[n-1] \right) \right].$$

В резултат е получен нерекурентен (позиционен) алгоритъм на управление. Той изисква запазване на всичките предишни стойности на сигнала на грешката $x[i]$, и изчисляване при всяка нова стойност на управляващият сигнал $u[n]$.

За програмна реализация на закона за регулиране, по-удобен е рекурентният алгоритъм. Той се характеризира с това, че за изчисления на текущата стойност на сигнал $u[n]$ се използва неговото предишно стойност $u[n\text{-}1]$ и коригиращ коефициент, не изисква съществени изчислителни разходи. Определя се в следната последователност :

$$u[n] - u[n-1] = u[n] - K_P \left[x[n-1] + \frac{T_ц}{T_I^x} \sum_{i=0}^{n-2} x[i] + \frac{T_D^x}{T_ц} \left(x[n-1] - x[n-2] \right) \right] \ominus$$

$$\ominus K_P \cdot \left[x[n] - x[n-1] + \frac{T_ц}{T_I^x} x[n-1] + \frac{T_D^x}{T_ц} \left(x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] \right) \right] \ominus$$

$$\ominus K_P \cdot \left[\underbrace{\left(1 + \frac{T_D^x}{T_ц} \right)}_{b_0 / K_P} \cdot x[n] + \underbrace{\left(\frac{T_ц}{T_I^x} - 1 - 2 \cdot \frac{T_D^x}{T_ц} \right)}_{b_1 / K_P} \cdot x[n-1] + \underbrace{\frac{T_D^x}{T_ц}}_{b_2 / K_P} \cdot x[n-2] \right].$$

Да пренесем $u[n\text{-}1]$ в дясната част – ще получим „скоростен" алгоритъм за програмна реализация на регулатора:

(*) $u[n] = u[n\text{-}1] + b_0\, x[n] + b_1\, x[n\text{-}1] + b_2\, x[n\text{-}2]$.

2. Ако за апроксимации на непрекъснатият интеграл, се използва метод на трапеца, то уравнението ще има вида:

$$u[n] = K_P \cdot \left[x[n] + \frac{T_ц}{T_I^x} \cdot \left(\frac{x[n] - x[0]}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} x[i] \right) + \frac{T_D^x}{T_ц} \left(x[n] - x[n-1] \right) \right].$$

Преобразуванията аналогични на горе изложените при получаване на рекурентно съотношение (*), се разкриват само за коефициент b_0:

$$b_0 = K_P \cdot \left(1 + \frac{T_D^x}{T_ц} + \frac{T_ц}{2T_I^x} \right).$$

Да запишем (*) за изображението на z-домена:

$U[z]\,(1 - z^{-1}) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-1})\, X[z]$,

Представяме го във вид на дискретна предавателна функция. Предавателна функция е:

$$W_{PID}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}.$$

Анализът на коефициентите показва, че:

1. За отстраняване на грешката, предавателната функция трябва да има полюс z^x=1.

2. Ако $b_2 = 0$, то получаваме PI-регулатор.

3. Ако $b_0 = 0$, а $b_1 = (1 + b_2)$, то получаваме PD-регулатор.

Алгоритми на програмите на цифрови филтри

Съществуват три основни алгоритъма на програмна реализация на дискретни предавателни функции (z-предавателна функция):

Алгоритъм	Изисквано бързодействие	Обем на памет
1. Непосредствен а) с два буфера б) с един буфер	24(m+k+1) / $T_ц$	9m+9k+12
2. Последователен	52k / $T_ц$	20k+10
3. Паралелен	50k / $T_ц$	19k+8

Дискретната предавателна функция предавателна функция може да бъде представена във всяка форма:

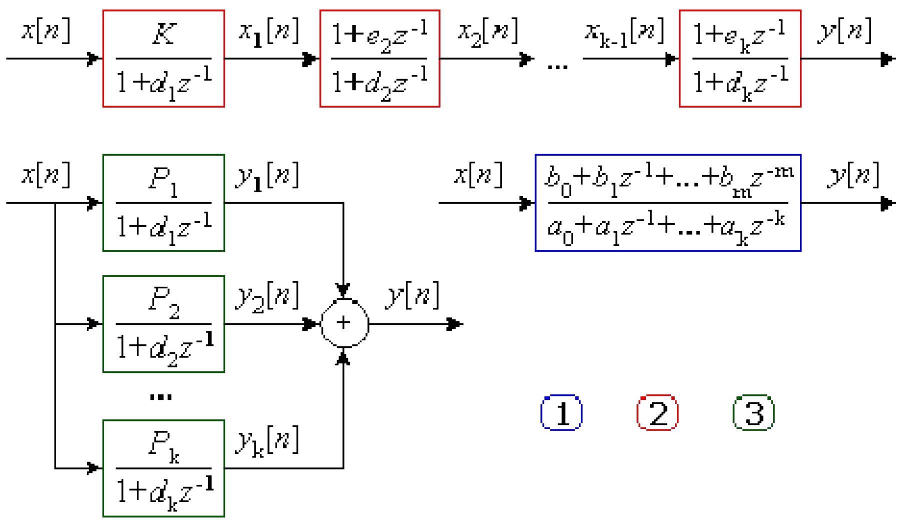
1 $$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_1 z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_1 z^{-n}}$$ - Стандартна форма на ДПФ

2 $$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{K}{1 + d_1 z^{-1}} \cdot \frac{1 + e_2 z^{-1}}{1 + d_2 z^{-1}} \cdots \frac{1 + e_k z^{-1}}{1 + d_k z^{-1}}$$ - Разлагане на z-ПФ на множители

3 $$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{P_1}{1 + d_1 z^{-1}} + \frac{P_2}{1 + d_2 z^{-1}} + \ldots + \frac{P_k}{1 + d_k z^{-1}}$$ - Разлагане на z-ПФ на елементарни дроби

където: e_i – са нули z-предавателната функция; d_i - полюси z-предавателната функция; a_0 - не е равно на нула; P_i – са коефициенти на разложение

На тези форми на разложение на z-предавателната функция съответстват структурни схеми изобразени на фигура 1.



фиг. 1

- Разложения 2 и 3 правят параметрите на z-предавателната функция независими, позволяват да се контролират ред на допълнителните фазови координати: $x_1[n]$, $x_2[n]$, ..., $x_{k-1}[n]$; или $y_1[n]$, $y_2[n]$, ..., $y_k[n]$ – което е удобно при настройване на системата.

- Последователна структура 2 е удобна при синтеза на дискретни коригиращи звена.
- Паралелна структура 3 е удобна за построяване на цифрови регулатори.
- Разложението на z-предавателна функция на елементарни дроби 3 позволява реализация на z-предавателна функции на паралелно работещи ЦЕИМ за повишаване на бързодействието.

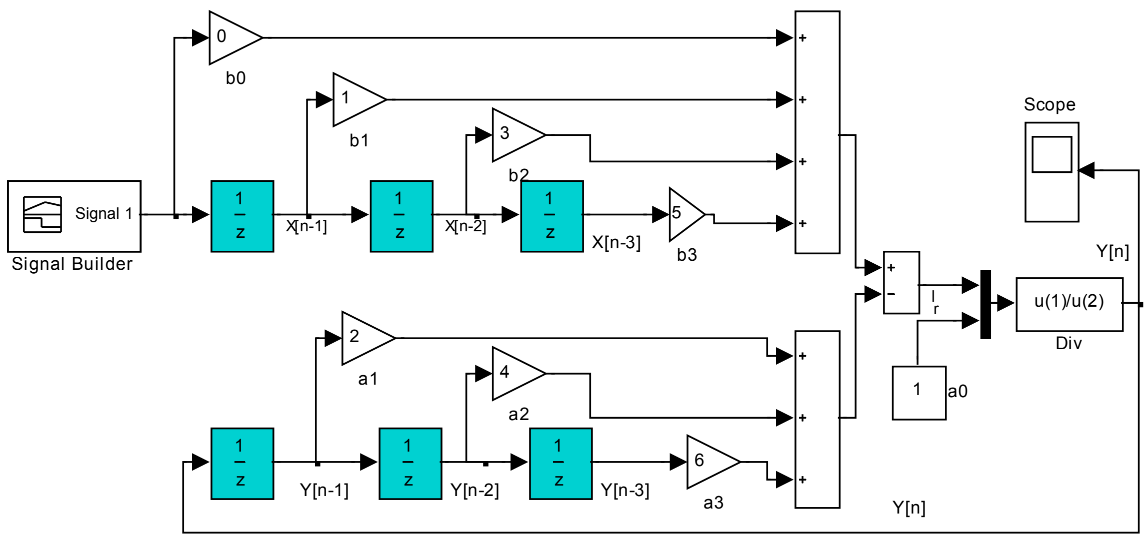
Изброените фактори определят избора на алгоритъм за програмата на ЦЕИМ.

След разложение, на всеки от множителите във формата 2 или всяка от елементарни дроби във формата 3 следва да бъде представена в стандартна форма 1 (с отрицатели степени на оператор z). Преходът към диференчно уравнение ще бъде един, z-предавателната функция във форма 1 съответства на диференчното уравнение (ДУ):

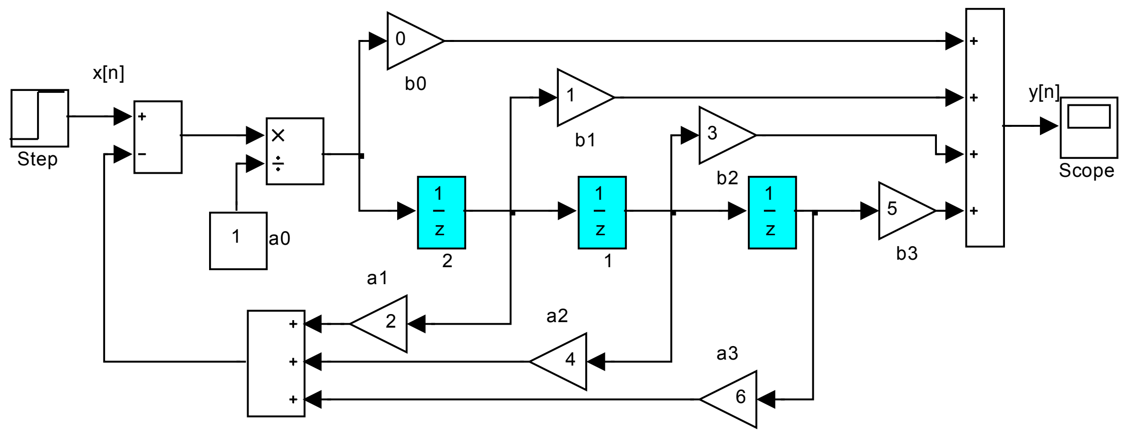
$$y[n] = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i x[n-i] - \sum_{j=1}^{k} a_j y[n-j] \right) \Big/ a_0 \quad ,$$

по което се съставя програмата. Понеже текущото значение на изходната координата $y[n]$, се изчислява по предишните значения $y[n\text{-}1]$, $y[n\text{-}2]$, $y[n\text{-}k]$ - даденото ДУ се нарича – рекурсивно.

Изобразяваме структурната схема на цифровия филтър, за това уравнение (фиг. 2). Тя може да се преобразува като се обединят двата буфера (фиг.3) Веригата от z^{-1} елементи в програмите ще съответстват на буфер от клетки в паметта,които се преместват при всеки такт на дискретизация. И двете структурни схеми могат да бъдат съставени от елементарни блокове на програмата Simulink.

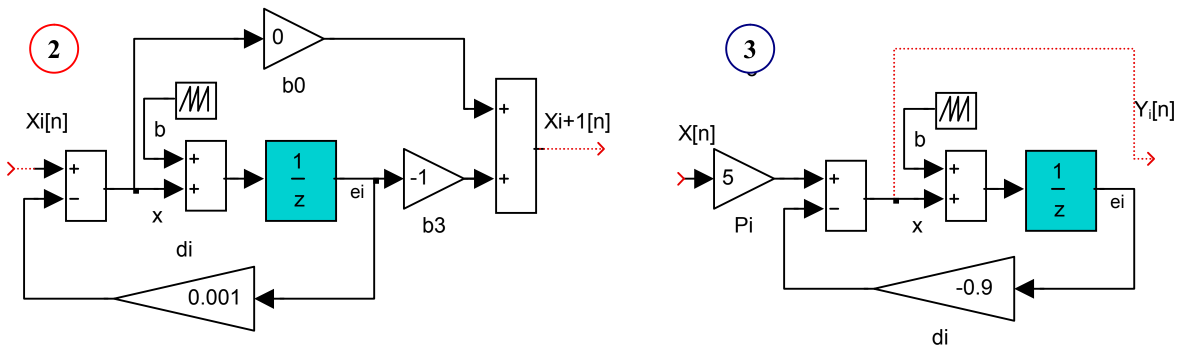


Фиг. 2. Структурна схема съответства алгоритъм 1а. Условие за физическа реализуемост $a_0 \neq 0$



Фиг. 3.Структурна схема съответства алгоритъм 1б. Условие за физическа реализуемост - $a_0 \neq 0$

Ако е избран последователен 2 или паралелен 3 алгоритъм, то структура на всеки множител или елементарна дроб от първия ред (фиг.1), ще има по-прост вид (фиг.4).



фиг.4

Според структурна схема от фиг.2, дискретна предавателна функция от втори ред е може да се реализира по следният начин:

```
function [y] = y_zW(x)
  y=( k * (x*b0+xz_1*b1+xz_2*b2) - (yz_1*a1+yz_2*a2) ) / a0;
 xz_2 = xz_1;  xz_1 = x ;
 yz_2=yz_1; yz_1=y;
 return y;
```

Където: xz_2, xz_1 и yz_2, yz_1 – са стойностите на ДПФ в моментите (n-2) и (n-1), т.е. регистри на забавяне - z^{-1}.

Ефект на квантови параметри

Предавателната функция на цифров PID-регулатор има три коефициента b_0, b_1, b_2. Трябва да отбележим , че само единия коефициент b_1 съдържа информация за интегралната константа T_I^x. За обяснение на същността на ефект на квантуване на параметрите, ще разгледаме, случай при не спрегнати плътно разположени полюси. Нека $T_I^x = 0{,}1$; $T_D^x = 0{,}01$; при $T_ц = 0{,}0003$. Изчисляваме коефициента b_1:

$$\frac{b_1}{K_p} = \frac{T_ц}{T_I^X} - 1 - 2.\frac{T_D^X}{T_ц} = 0.003 - 1 - 66.6667 = 67.6637$$

$$67663 \rightarrow 10000100001001111 \Rightarrow изисква 17\ разрядна\ мантиса$$

Трябва да отбележим, че за всяка произволна система, увеличаването двойно на всяка времеконстанта, не трябва да има критично значение, обаче коефициентите на предавателна функция, както е показано зависят от параметри отличаващи се по редове, затова можем да кажем за отношението $T_D^x/T_ц$, влизащо във всички коефициенти на числителя на предавателната функция трябва да се съхраняват в мантиса от 5 знака в противен случай параметъра T_I^x ще бъде загубен в резултат на закръгленията.

Съществуват следните методи за преодоляване на ефекта от квантуване на параметрите при ограничена дължина на мантисата:

1. Развръзката на параметри с помощта на разложение на z-предавателна функция от високия ред или на множители, или на елементарни дроби.

2. Подбиране за реализация на z-предавателна функция на структурна система между алтернативни, имащи различно по плътност разпределение на корените в единичната окръжност.