Цифров ПИД регулатор

А./ Общ случай

Уравнението на идеалния аналогов ПИД регулатор е:

$$u(t) = K_p.[e(t) + \frac{1}{T_И}.\int_0^t e(\tau)d\tau + T_Д \frac{de}{dt}] \qquad \textbf{(34)}$$

K_p – коефициент на усилване;

$T_и$ – време на интегриране;

$T_Д$ – време на диференциране;

Ако тактът на квантуване T_0 е малък, производната може да се замени с първа разлика, а интеграрането да се извърши по метода на правоъгълниците. Тогава за изхода на регулатора в момента t = k.

$$u(k) = K_p.[e(k) + \frac{T_0}{T_И}\sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_Д}{T_0}.(e(k) - e(k-1))] \qquad \textbf{(35)}$$

Формулата дава стойността на управляващия сигнал $u(k.T_0)$ във всеки момент на дискретизация и затова е известна като позиционен ПИД алгоритъм. Неудобството му се състой в това, че в дясната страна участват всички предишни стойности на грешката на регулиране e(k). Нека я преубразуваме по следния начин, като определим:

$$\begin{aligned}
&u(k-1) = K_p.[e(k-1) + \frac{T_0}{T_И}\sum_{i=0}^{k-2} e(i) + \frac{T_Д}{T_0}.(e(k-1) - e(k-2))] \\
&\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = \\
&= K_p[e(k) + \frac{T_0}{T_И}.e(k-1) + \frac{T_Д}{T_0}.(e(k) - 2(e(k)-1) + e(k-2))] = \\
&= f_0.e(k) + f_1.e(k-1) + f_2.e(k-2)
\end{aligned} \qquad \textbf{(36)}$$

където параметрите на цифровия регулатор са свързани с параметрите на аналоговия регулатор чрез съотношенията:

$$\begin{aligned}
&f_0 = K_p.(1 + \frac{T_Д}{T_0}); \\
&f_1 = -K_p.(1 + 2\frac{T_Д}{T_0} - \frac{T_0}{T_И}); \\
&f_2 = K_p.\frac{T_Д}{T_0};
\end{aligned} \qquad \textbf{(37)}$$

Формулата дава изменението на управляващия сигнал и тя е известна като скоростен ПИД алгоритъм. От нея непосредствено следва и предвателната функция на цифровия ПИД регулатор:

$$W_p(z^{-1}) = \frac{f_0 + f_1.z^{-1} + f_2.z^{-2}}{1 - z^{-1}} \qquad \textbf{(38)}$$

Тъй като тя съдържа полюс z = 1, цифровият ПИД регулатор осигурява нулева статична грешка на затворената система при стъпаловидни външни сигнали (задание и смущения).

Ако във формулата:

$$u(t) = K_p.[e(t) + \frac{1}{T_И}.\int_0^t e(\tau)d\tau + T_Д \frac{de}{dt}] \qquad \textbf{(39)}$$

численото интегриране се извърши по метода на трапеците, предавателната функция остава същата, но стойностите на параметрите f_0 и f_1 се променят:

$$\begin{aligned} f_0 &= K_p.(1 + 0{,}5.\frac{T_0}{T_И} - \frac{T_Д}{T_0}); \\ f_1 &= -K_p.(1 + 2\frac{T_Д}{T_0} - 0{,}5\frac{T_0}{T_И}); \end{aligned} \qquad \textbf{(40)}$$

При малки тактове на квантуване, коефициентите получени по различните формули не се различават съществено.

Могат да се дефинират параметрите на предавателната функция по следния начин:

- коефициент на усилване

$$K_p = f_0 - f_2; \qquad \textbf{(41)}$$

- коефициент на интегриране

$$C_И = \frac{f_0 + f_1 + f_2}{K_p} \qquad \textbf{(42)}$$

- коефициент на изпреварване

$$C_Д = \frac{f_2}{K_p} \qquad \textbf{(43)}$$

При малки тактове на квантуване, чистото интегриране и диференциране дават незначителна грешка:

$$C_И \approx \frac{T_0}{T_И}, C_Д \approx \frac{T_Д}{T_И} \qquad \textbf{(44)}$$

Предавателната функция на ПИД – регулатора, изразена чрез коефициентите е:

$$W_p(z^{-1}) = \frac{K_p.[(1+C_Д)+(C_И - 2C_Д - 1).z^{-1} + C_Д.z^{-2}]}{1-z^{-1}} =$$
$$= K_p.[1 + C_И.\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + C_Д.(1-z^{-1})] \quad \textbf{(45)}$$

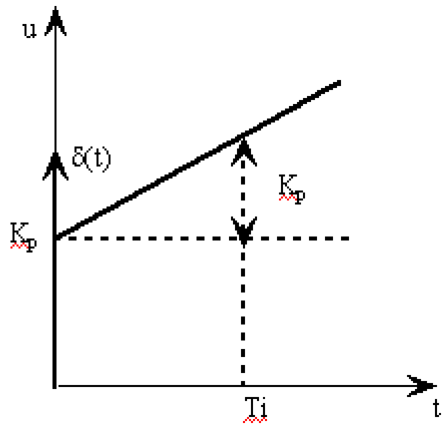
Преходната характеристика на цифровия ПИД регулатор се получава при e(k) = 1(k). Тогава от уравнението:

$$u(k) = u(k-1) + f_0.e(k) + f_1.e(k-1) + f_2.e(k-2) \quad \textbf{(46)}$$

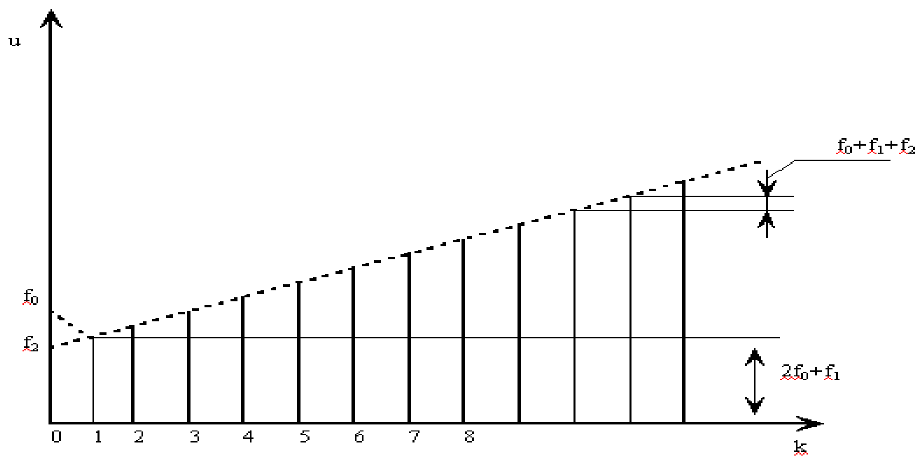
следва:

$$\begin{aligned}
&u(0) = f_0; \\
&u(1) = u(0) + f_0 + f_1 = 2f_0 + f_1; \\
&u(2) = u(1) + f_0 + f_1 + f_2 = 3f_0 + 2f_1 + f_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&u(k) = u(k-1) + f_0 + f_1 + f_2 = (k+1).f_0 + k.f_1 + (k-1).f_2
\end{aligned} \quad \textbf{(47)}$$

Преходната характеристика на идеалния аналогов ПИД регулатор е представена на фигура 2.3.1, а на цифровия ПИД регулатор – на фигура 2.3.2:



Фиг.2.3.1



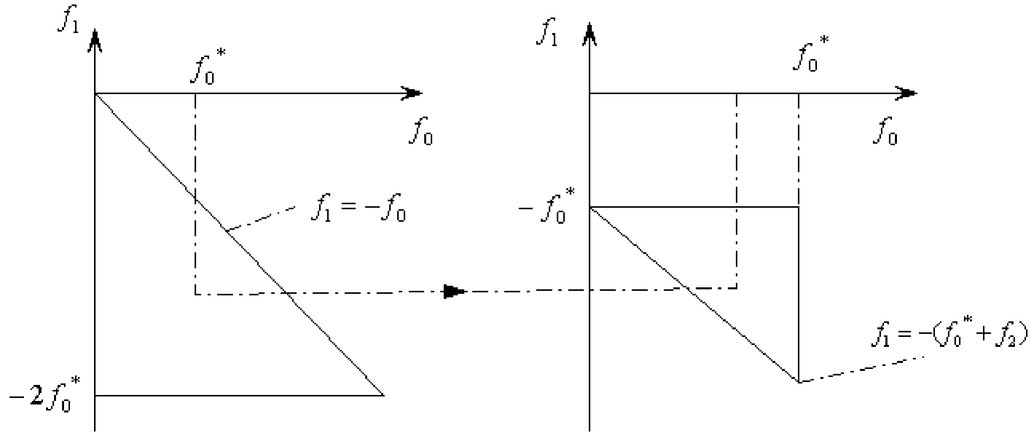
Фиг.2.3.2

$$
\begin{aligned}
&C_Д \geq 0 \Rightarrow f_2 \geq 0 \\
&K_p = f_0 - f_2 > 0 \Rightarrow f_0 > f_2 \\
&0 < u(1) < u(0) \Rightarrow f_0 + f_1 < 0 \Rightarrow f_1 < f_0; 2f_0 + f_1 > 0 \Rightarrow f_1 > -2f_0 \\
&u(k) > u(k-1), k > 1 \Rightarrow f_0 + f_1 + f_2 > 0 \Rightarrow f_2 > -(f_0 + f_1)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(48)}
$$

Всички тези съотношения между параметрите на предавателната функция на ПИД регулатора дават следната система неравенства:

$$
\begin{aligned}
&f_0 > 0, \\
&-2f_0 < f_1 < -f_0, \\
&-(f_0 + f_1) < f_2 < f_0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(49)}
$$

Системата неравенства определя допустимата област на изменение на параметрите на цифровия ПИД-регулатор, представен на фигура 4



Фиг. 2.3.3

Ако някое от неравенствата се нарушава, регулаторът с тази предавателна функция вече не е регулатор. Настройката на цифровия ПИД регулатор не е особено проста, тъй като тези параметри са взаимно зависими.

Б./ Частни случай

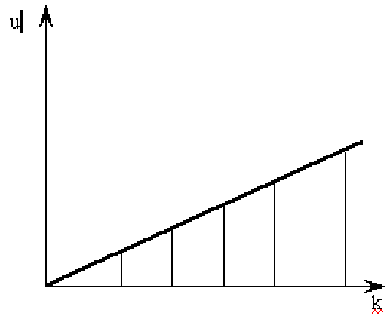
1. П-регулатор

$$
\begin{aligned}
&W_p(z^{-1}) = \frac{K_p.[(1+C_Д)+(C_И-2C_Д-1).z^{-1}+C_Д.z^{-2}]}{1-z^{-1}} = \\
&= K_p.[1+C_И.\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+C_Д.(1-z^{-1})] \\
&C_И = C_Д = 0 \\
&T_И = \infty; T_Д = 0 \\
&W_p(z) = K_p = f_0 \\
&u(k) = f_0.e(k)
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(56)}
$$

2. И-регулатор

$$
\begin{aligned}
&W_p(z^{-1}) = K_p.\frac{C_И.z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{f_1.z^{-1}}{1-z^{-1}} \\
&u(k) = u(k-1)+f_1.e(k-1), f_1 > 0
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(57)}
$$

Преходната му характеристика е:

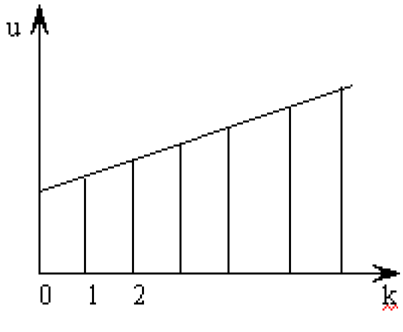


Фиг.2.3.4

3. ПИ регулатор

$$W_p(z^{-1}) = \frac{K_p.[(1+C_Д)+(C_И-2C_Д-1).z^{-1}+C_Д.z^{-2}]}{1-z^{-1}} =$$
$$= K_p.[1+C_И.\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+C_Д.(1-z^{-1})];$$
$$C_Д=0; T_Д=0 \qquad \textbf{(58)}$$
$$W_p(z^{-1}) = \frac{k_p.\left[1+(C_И-1).z^{-1}\right]}{1-z^{-1}} = \frac{f_0+f_1.z^{-1}}{1-z^{-1}}$$
$$u(k)=u(k-1)+f_0.e(k)+f_1.e(k-1), f_1>-f_0$$

Преходната му характеристика е:



Фиг.2.3.5